УДК 517.968.78, 519.642.2
doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-2

Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов

А. А. Цупак

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – доказательство сходимости проекционного метода в задаче дифракции электромагнитной волны на рассеивателе сложной формы. *Материалы и методы.* Метод Галеркина формулируется для векторного интегро-дифференциального уравнения задачи дифракции; определяются базисные вектор-функции на объемных телах произвольной формы и параметрически заданных криволинейных экранах. *Результаты*. Для объемных рассеивателей и криволинейных параметризуемых экранов введены базисные функции, удовлетворяющие свойству аппроксимации; доказана сходимость метода Галеркина. *Выводы*. Рассмотрение параметрически заданных экранов позволяет существенно расширить область применимости метода интегральных уравнений для решения векторных задач дифракции, а также обосновать метод Галеркина для численного решения таких задач.

Ключевые слова: задача дифракции электромагнитной волны, система тел и неплоских экранов, интегро-дифференциальные уравнения, базисные функции, свойство аппроксимации, сходимость метода Галеркина

Для цитирования: Цупак А. А. Сходимость метода Галеркина в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 14–25. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-2

Convergence of the Galerkin method in the problem of electromagnetic wave diffraction on a system of solids and curvilinear screens

A.A. Tsupak

Penza State University, Penza, Russia

altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background*. The purpose of this study is to prove the convergence of the projection method in the problem of diffraction of electromagnetic waves by scatterers of a complex shape. *Material and methods*. The Galerkin method is formulated for the vector integro-differential equation of the diffraction problem; basis vector functions are determined on volumetric bodies of arbitrary shape as well as on parametric curvilinear screens. *Results*. For volumetric solids and non-planar parameterized screens, basis functions satisfying the approximation condition are introduced; the convergence of the Galerkin method is proved. *Conclusions*: parameterization of screens makes it possible to significantly expand the applicability of the integral equations method for solving vector diffraction problems, as well as to justify the Galerkin method for their numerical solving.

Keywords: the problem of diffraction of electromagnetic waves, systems of solids and non-flat screens, integro-differential equations, basis functions, approximation condition, convergence of the Galerkin method

For citation: Tsupak A.A. Convergence of the Galerkin method in the problem of electromagnetic wave diffraction on a system of solids and curvilinear screens. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):14–25. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-2

Введение

В работе доказывается сходимость метода Галеркина для системы векторных интегро-дифференциальных (ИД) уравнений, к которой сводится векторная задача дифракции электромагнитной волны на системе рассеивателей, состоящей из параметрически заданных криволинейных экранов Ω_i и объемных неоднородных тел Q_j.

Матричный оператор системы интегро-дифференциальных уравнений исследован в работах [1–4]. В частности, показано, что при определенных ограничениях на диэлектрические свойства объемного рассеивателя и пространства оператор является эллиптическим и непрерывно обратимым. Это обеспечивает сходимость метода Галеркина в случае, когда базисные функции удовлетворяют условию аппроксимации в выбранных пространствах решений.

Примерами таких функций являются кусочно-линейные финитные функции на объемных рассеивателях, а также функции типа RWG или rooftop [5, 6] на плоских (или кусочно-плоских) идеально проводящих экранах.

В данной работе рассмотрен более сложный случай неплоских экранов, заданных параметрически. Базисные вектор-функции на таких экранах определяются как образы функций RWG, предварительно определенных на плоской области параметров, при действии гладкого отображения касательных пространств. Устанавливается принадлежность новых вектор-функций подходящему пространству, доказывается свойство аппроксимации в этом пространстве. В качестве следствия выводится и главный результат статьи – сходимость метода Галеркина.

1. Система интегро-дифференциальных уравнений задачи дифракции

Рассмотрим задачу дифракции монохроматической электромагнитной волны (с заданной круговой частотой $\omega > 0$) на системе рассеивателей, расположенных в изотропной однородной среде в $\mathbb{R}^3$ с известными значениями проницаемостей ε_e и μ_e, удовлетворяющих условиям:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_e > 0, \mathrm{Im}\,\varepsilon_e > 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu_e > 0, \mathrm{Im}\,\mu_e = 0. \tag{1}$$

Волновое число $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ удовлетворяет условиям:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_e > 0,\ \mathrm{Im}\,k_e > 0. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче двумерные рассеиватели – идеально проводящие бесконечно тонкие экраны Ω_i, не пересекающиеся друг с другом; $\Omega = \cup\Omega_i$. Экран Ω, который может быть многосвязным, задается вектор-функцией

$$\mathbf{x}(t) : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

с ограниченной областью параметров D. Предполагается, что $x_k \in C^\infty(\bar{D})$, а матрица Якоби $\hat{\mathbf{J}}(t) = \partial \mathbf{x}/\partial t$ всюду в $\bar{D}$ имеет ранг, равный 2. Тогда поверхность Ω является гладкой с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Введение регулярных координат по формуле (1) определяет и гладкое поле нормалей $\mathbf{n}$ на Ω.

Трехмерный рассеиватель представляет собой объемное тело Q (возможно, многосвязное) с гладкой границей ∂Q класса C^∞. Область тела Q диэлектрически неоднородна и анизотропна: магнитная проницаемость μ_e постоянна, а диэлектрическая проницаемость описывается тензор-функцией $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)$ с гладкими компонентами $\varepsilon_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{Q})$. Вводится относительная диэлектрическая проницаемость $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)/\varepsilon_e$; предполагается существование в $\bar{Q}$ тензора

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \left[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x) - \hat{\mathbf{I}}\right]^{-1}, \tag{4}$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ – единичный тензор.

Задача дифракции электромагнитной волны $(\mathrm{E},\mathrm{H}) = (\mathbf{E},\mathbf{H})e^{-i\omega t}$ на системе попарно непересекающихся тел и экранов сводится [2] к системе векторных ИД-уравнений:

$$\begin{gathered}
\hat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{J} - \left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy - \\
-\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y = \mathbf{E}_0(x), \qquad x \in Q, \\
\left(-\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy - \right. \\
\left. -\left(k_e^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y \right)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{J}(x) = \left[\dfrac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)}{\varepsilon_e} - \hat{\mathbf{I}}\right]\mathbf{E}(x)$, $G(x,y) = \dfrac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, $\mathbf{E}_{0,\tau}$ – касательная компонента падающего поля.

Краткая операторная форма записи уравнения (5) имеет вид

$$\hat{L}\mathbf{U} = \mathbf{f}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{U} = (\mathbf{J},\mathbf{u})^T$ – искомое решение; $\mathbf{f} = (\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_{0,\tau})^T$ – заданная правая часть уравнения; $\hat{L}$ – матричный оператор системы, который рассматривается как отображение пространства $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(Q) \times W(\overline{\Omega})$ в антидвойственное пространство $\mathbf{X}' = \mathbf{L}_2(Q) \times W'(\Omega)$ [2, 7].

Замечание. К системе (5) приводит и задача дифракции на частично экранированном диэлектрике с условием $\Omega \subset \partial Q$ [2–4].

2. Формулировка метода Галеркина

Приближенное решение (6) имеет вид $\mathbf{U}_m = (\mathbf{J}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1})^T$, где

$$\mathbf{J}_{m_0}(x) = \sum_{k=1}^{m_0} c_k^0 \mathbf{v}^{(0)}(x), \quad \mathbf{u}_{m_1}(x) = \sum_{k=1}^{m_1} c_k^1 \mathbf{v}^{(1)}(x) \;-$$

линейные комбинации базисных функций (определены ниже).

Запишем также

$$\mathbf{U}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{v}_k(x),$$

$$c_k = c_k^0,\, \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_k^{(0)}(x), 0)^T \text{ при } k \le m_0;\; c_k = c_{k-m_0}^1,\, \mathbf{v}_k = (0, \mathbf{v}_{k-m_0}^{(1)}(x))^T \text{ при } k > m_0.$$

Коэффициенты c_k найдем согласно методу Галеркина [8] из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\langle \hat{L}\mathbf{U}_m, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall \mathbf{v}_k \in \mathbf{X}_m,$$

где

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_{m_0}^0 \times \mathbf{X}_{m_1}^1, \quad \mathbf{X}_{m_0}^0 = span\{\mathbf{v}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{v}_{m_0}^{(0)}\} \subset \mathbf{L}_2(Q),$$
$$\mathbf{X}_{m_1}^1 = span\{\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{m_1}^{(1)}\} \subset W(\overline{\Omega}),$$

скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают полуторалинейную форму, задающую антидвойственное спаривание $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$.

Достаточные условия непрерывной обратимости и эллиптичности оператора $\hat{L}$ описаны в работах [1–4]. Для доказательства сходимости метода Галеркина остается определить базисные функции, удовлетворяющие условию аппроксимации в выбранных пространствах.

3. Определение базисных функций. Свойство аппроксимации. Сходимость метода Галеркина

3.1. Базисные функции в области объемного рассеивателя

Рассмотрим простейшие финитные кусочно-постоянные функции. Для этих функций выполнение свойства аппроксимации почти очевидно (а именно этот теоретический результат и нужен для доказательства сходимости метода Галеркина). Кроме того, их использование при программной реализации оказывается возможным для объемных рассеивателей сколь угодно сложной формы.

Рассмотрим тело произвольной формы в Q и параллелепипед $Q' = [\mathbf{a};\mathbf{b}] \supset Q$. Введем подобласти $Q_i = Q_{i_1 i_2 i_3} = Q \cap Q'_{i_1 i_2 i_3}$, $i_k = 1,\dots,l_k$, где совокупность $\{Q'_{i_1 i_2 i_3} = [\mathbf{a}_i; \mathbf{a}_i + \mathbf{h}]\}$ представляет собой равномерное разбиение Q параллелепипедами равного объема $h_1 h_2 h_3$. Введем функции

$$v_i^0(x) = v_{i_1 i_2 i_3}^0(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \\ 0, x \notin Q \cap Q_{i_1 i_2 i_3}, \end{cases} \tag{7}$$

для подобластей $Q_{i_1 i_2 i_3}$ положительного объема. Из определения базисных функций и свойств кусочно-постоянных функций в пространстве $L_2(Q)$ следует

Лемма 1. Пусть $diam(Q'_{i_1 i_2 i_3}) \to 0$ при $m_0 \to \infty$. Тогда финитные функции $v_i^0(x)$ удовлетворяют условию аппроксимации в $L_2(Q)$, а вектор-функции $\mathbf{v}_k(x)$ – в пространстве в $\mathbf{L}_2(Q)$.

3.2. Функции RWG на плоском экране

Опишем некоторые свойства функций RWG [5] на плоском экране:

$$\Omega = \left\{ x' = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2 \right\}.$$

Введем прямоугольники $\omega_j = \omega_{j_2 j_2} = \left\{ x' : x_{k,j_k} < x_k < x_{k,j_k+1} \right\}$, $k = 1,2$, $j_k = 0,\dots,n_k - 1$, где $x_{k,j_k} = a_k + h_k j_k$, $h_k = (b_k - a_k)/n_k$, $k = 1,2$, и разобьем их диагоналями фиксированного направления.

Через $\Gamma = \{\gamma_j\}$ обозначим совокупность ребер, не принадлежащих $\partial\Omega$. Пусть σ_j^+, σ_j^- – пара треугольников с общим ребром γ_j; $l(\gamma_j)$ – длина ребра γ_j, а $s(\sigma_j^{\pm})$ – площадь треугольников $\sigma_j^{\pm}$; точки $(x_{1,j_1}^+, x_{2,j_2}^+, 0) \in \sigma_j^+$ и $(x_{1,j_1}^-, x_{2,j_2}^-, 0) \in \sigma_j^-$ – вершины треугольников, не принадлежащие γ_j. Функции RWG имеют вид

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(x') = \begin{cases} (x_1 - x_{1,j_1}^+, x_2 - x_{2,j_2}^+)\dfrac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^+)}, & x' \in \sigma_j^+, \\ (x_{1,j_1}^- - x_1, x_{2,j_2}^- - x_2)\dfrac{l(\gamma_j)}{s(\sigma_j^-)}, & x' \in \sigma_j^-, \\ (0,0), & x' \notin \sigma_j^+ \cup \sigma_j^-. \end{cases} \tag{8}$$

Лемма 2. Функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$ принадлежат $W(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют в этом пространстве условию аппроксимации.

Доказательство. Переобозначим $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$ через $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1,t_2)$. Можно показать, что $\mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1,t_2) \in W = W(\overline{\Omega})$, т.е. $\mathbf{v}_j^{(1,0)}, \mathrm{div}\mathbf{v}_j^{(1,0)} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$. Первое включение очевидно, так как на самом деле $\mathbf{v}_j^{(1)}(x')$ *ограничены и кусочно непрерывны и, следовательно,* $\mathbf{v} \in L_2(\Omega) = H^0(\overline{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$.

Доказательство включения $\mathrm{div}\,\mathbf{v} \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$ основано на определении дивергенции как распределения по формуле

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} w \mathrm{div}\,\mathbf{v} = -\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{grad}\,w \cdot \mathbf{v}, \quad \forall w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^2),$$

и компактности носителя $\mathbf{v}$ в $\overline{\Omega}$. Подробное доказательство приведено в [9].

3.3. Базисные вектор-функции на неплоских гладких экранах: определение, свойство аппроксимации

Пусть Ω – гладкая (класса C^∞) двумерная ориентируемая поверхность с краем; $\overline{\Omega}$ – двумерное ориентируемое гладкое компактное многообразие с гладким краем $\partial\Omega$. На Ω рассмотрим конечное покрытие окрестностями $U = \{U_\alpha\}$, которые отображаются гладкими диффеоморфизмами $\kappa_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ в $\mathbb{R}^2$, причем V_α отрыты в $\mathbb{R}^2$. Например, образы окрестностей внутренних точек диффеоморфны кругам с центром в точках $t = \kappa_\alpha(x)$, а образы окрестностей граничных точек – полукругам в $\mathbb{R}^2_+$. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ – разбиение единицы, подчиненное U [10]. Норма в пространстве $H^s(M)$ определяется [11] равенством

$$\| u \|_{H^s(M)} = \sum_\alpha \| u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\varphi_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t)) \|_{H^s(\mathbb{R}^2)}.$$

Определим базисные функции на неплоских параметрически заданных поверхностях в $\mathbb{R}^3$: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i = x_i(t_1,t_2),\ i = 1,2,3\}$, $(t_1,t_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Здесь D – прямоугольник, $D = \{(t_1,t_2) : t_i \in (0; a_i)\}$. Отображение $\mathbf{x}(t) : D \to \Omega$ – диффеоморфизм класса C^∞: $\mathbf{x} \in C^\infty(\overline{D})$, $\mathbf{x}^{-1} = \kappa \in C^\infty(\overline{\Omega})$, матрица Якоби $\mathbf{x}'_t$ которого в каждой точке $(t_1,t_2) \in D$ имеет ранг 2.

Определим вектор-функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ в пространстве $W = W(\overline{\Omega})$ касательного расслоения Ω. В исследуемой задаче неизвестная $\mathbf{u}$ (см. уравнения (5)) есть сечение $\Omega \to T\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Отображение касательных пространств определяется дифференциалом $D\mathbf{x} : TD \to T\Omega$. В D уже введены функции RWG $\mathbf{v}_j^{(1)}(x') =: \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1,t_2)$, теперь определим базисные вектор-функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ в точках $x = \mathbf{x}(t_1,t_2)$ экрана Ω:

$$\mathbf{v}_j^{(1)}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t_1,t_2), \ x(t) \in \Omega.$$

Теорема 1. Вектор-функции $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ на гладком (класса C^{∞}) ориентируемом незамкнутом параметрически заданном экране Ω удовлетворяют условию аппроксимации в пространстве $W = W(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Из леммы 2 и гладкости Ω следует $\mathbf{v}_j^{(1)}(x) \in W = W(\overline{\Omega})$. Докажем полноту системы $\{\mathbf{v}_j^{(1)}\}$ в $W(\overline{\Omega})$. Вектор-функции RWG (на плоских экранах) удовлетворяют условию

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{m_1} \|_W = \| \mathbf{u} - \sum_{j=1}^{m_1} c_j \mathbf{v}_j^{(1)} \|_W < \varepsilon, \qquad (9)$$

при этом коэффициенты c_j можно [12] задать так, что при $n \to \infty$

$$\sup_{t \in D} | \mathbf{u}_D(t) - \mathbf{u}_{m_1,D}(t) | \to 0, \quad \sup_{t \in D} | \operatorname{div} \mathbf{u}_D(t) - \operatorname{div} \mathbf{u}_{m_1,D}(t) | \to 0,$$

откуда следует

$$\inf_{\mathbf{u}_{m_1,D}} \| \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_{m_1,D} \|_{W(\overline{D})} \le C_0 \| \mathbf{u}_D \|_{C^2(\overline{D})} O(1/n). \qquad (10)$$

Получим оценки, аналогичные (9), на неплоском гладком экране Ω. Это достаточно сделать для гладких сечений, так как класс $C_0^{\infty}(\Omega)$ всюду плотен в W [7]. Покажем сначала, что при $m_1 \to \infty$ верно $\| \mathbf{r}(x) \|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} | \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x) | \to 0$, оценим $| \mathbf{r}(x) |$ в произвольной точке $x \in \Omega$:

$$| \mathbf{r}(x) | = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \mathbf{u}_D(t) - \sum_j c_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} (\mathbf{u}_D(t) - \sum_j c_j \mathbf{v}_j^{(1,0)}(t)) \right| \le c_1 | \mathbf{u}_D(t) - \mathbf{u}_{D,m_1}(t) |.$$

Сечение $\mathbf{u}_D(t)$ – прообраз $\mathbf{u}(x)$, причем $\mathbf{u}_D \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ в силу гладкости отображения $\partial \mathbf{x} / \partial t : T_t D \to T_x \Omega$.

Далее покажем, что $\| \operatorname{div}_{\tau} \mathbf{r}(x) \|_{\infty} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} | \operatorname{div}_{\tau} (\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x)) | \to 0$ при $m_1 \to \infty$. Поверхностная дивергенция вектор-функции $\mathbf{f}$ на гладкой поверхности определяется равенством [10, 13]:

$$\operatorname{div}_{\tau} \mathbf{f} = g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \mathbf{f}) \cdot (\partial_{\mu} \mathbf{x}).$$

Здесь

$$\mu, \nu \in \{1, 2\}, \ \partial_{\mu} \mathbf{f} = (\partial_{t_{\mu}} f_1, \partial_{t_{\mu}} f_2, \partial_{t_{\mu}} f_3)^T, \ \partial_{\mu} \mathbf{x} = (\partial_{t_{\mu}} x_1, \partial_{t_{\mu}} x_2, \partial_{t_{\mu}} x_3)^T,$$

а тензор $g^{\mu\nu}$ – обратный к метрическому тензору

$$g_{\mu\nu} = (\partial_{t_\mu}\mathbf{x} \cdot \partial_{t_\nu}\mathbf{x}) \equiv (\partial_\mu \mathbf{x} \cdot \partial_\nu \mathbf{x}).$$

Вычислим $\mathrm{div}_\tau \mathbf{r}(x) = \mathrm{div}_\tau(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x))$ в произвольной точке $x \in \Omega$, обозначая через $\mathbf{p}(t) = (p_1, p_2)^T$ прообраз сечения $\mathbf{r}(x)$ при отображении $D\mathbf{x}$:

$$\mathrm{div}_\tau \mathbf{r} = g^{\mu\nu}(\partial_\mu \mathbf{r}) \cdot (\partial_\mu \mathbf{x}) =$$

$$= g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)\mathbf{p}\right) \cdot \partial_\mu \mathbf{x} + g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\partial_\mu(\mathbf{p})\right) \cdot \partial_\mu \mathbf{x} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2. \qquad (11)$$

В силу гладкости $\partial\mathbf{x}/\partial t$ на $\overline{D}$ и в силу первого соотношения из (9) имеем $\mathbf{R}_1 \to 0$ при $m_1 \to \infty$. Преобразуем слагаемое $\mathbf{R}_2$:

$$\mathbf{R}_2 = g^{11}[\partial_1 x_1 \partial_1 p_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 p_2 \partial_1 x_1 + \partial_1 x_2 \partial_1 p_1 \partial_1 x_2 +$$
$$+\partial_2 x_2 \partial_1 p_2 \partial_1 x_2 + \partial_1 x_3 \partial_1 p_1 \partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_1 p_2 \partial_1 x_3] +$$
$$+g^{12}[\partial_1 x_1 \partial_1 p_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 p_2 \partial_2 x_1 + \partial_1 x_2 \partial_1 p_1 \partial_2 x_2 +$$
$$+\partial_2 x_2 \partial_1 p_2 \partial_2 x_2 + \partial_1 x_3 \partial_1 p_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_1 p_2 \partial_2 x_3] +$$
$$+g^{21}[\partial_1 x_1 \partial_2 p_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 p_2 \partial_1 x_1 + \partial_1 x_2 \partial_2 p_1 \partial_1 x_2 +$$
$$+\partial_2 x_2 \partial_2 p_2 \partial_1 x_2 + \partial_1 x_3 \partial_2 p_1 \partial_1 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_2 p_2 \partial_1 x_3] +$$
$$+g^{22}[\partial_1 x_1 \partial_2 p_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 p_2 \partial_2 x_1 + \partial_1 x_2 \partial_2 p_1 \partial_2 x_2 +$$
$$+\partial_2 x_2 \partial_2 p_2 \partial_2 x_2 + \partial_1 x_3 \partial_2 p_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 x_3 \partial_2 p_2 \partial_2 x_3] =$$
$$= S_1(\partial_1 p_1, \partial_2 p_2) + S_2(\partial_2 p_1, \partial_1 p_2).$$

Из второго предельного соотношения в (9) следует: $S_1 \to 0$ при $m_1 \to \infty$. Рассмотрим S_2, группируя слагаемые с общими множителями вида $\partial_i p_j g^{\mu\nu}$:

$$S_2 = \partial_1 p_2[g^{11}(\partial_2 \mathbf{x}) \cdot (\partial_1 \mathbf{x}) + g^{12}(\partial_2 \mathbf{x}) \cdot (\partial_2 \mathbf{x})] +$$
$$+\partial_2 p_1[g^{21}(\partial_1 \mathbf{x}) \cdot (\partial_1 \mathbf{x}) + g^{22}(\partial_1 \mathbf{x}) \cdot (\partial_2 \mathbf{x})] =$$
$$= \partial_1 p_2[g^{11} g_{21} + g^{12} g_{22}] + \partial_2 p_1[g^{21} g_{11} + g^{22} g_{12}] = 0.$$

Равенство нулю вытекает из симметричности взаимно обратных тензоров $g^{\mu\nu}$ и $g_{\nu\lambda}$ ($g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$). Следовательно, коэффициенты c_j при функциях $\mathbf{v}_j^{(1)}$ можно задать так, что при $n, m_1(n) \to \infty$:

$$\sup_{x\in\Omega} |\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{m_1}(x)| \to 0, \quad \sup_{x\in\Omega} |\mathrm{div}_\tau \mathbf{u}(x) - \mathrm{div}_\tau \mathbf{u}_{m_1}(x)| \to 0,$$

откуда и из (10) следует оценка

$$\inf_{\mathbf{u}_{m_1}\in\mathbf{X}^1_{m_1}} \| \mathbf{u}-\mathbf{u}_{m_1} \|_{W(\overline{\Omega})} \le C_1 \cdot O(1/n)$$

в пространстве W. Теорема доказана.

Сформулируем и докажем теорему о сходимости метода Галеркина.

Теорема 2. Пусть в $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ выполнены условия (1), (2), а в $\overline{Q}$ существует ограниченный тензор (4). Пусть в $\overline{Q}$ выполнено одно из условий:

$$\mathrm{Re}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \geqslant C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_1 > 1,$$

$$\mathrm{Im}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \geqslant C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_2 > 0,$$

$$-\mathrm{Im}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(x)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \geqslant C_3 |\mathbf{v}|^2 \text{ при некотором } C_3 > 0$$

для всех $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^3$. Пусть, кроме того, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \varepsilon(x)\hat{\mathbf{I}}$, если $\mathrm{Im}\,\varepsilon_{ij} = 0$.

Пусть функции $\mathbf{v}_i^0(x)$ и $\mathbf{v}_j^{(1)}(x)$ удовлетворяют условию аппроксимации в $\mathbf{L}_2(Q)$ и $W(\overline{\Omega})$ соответственно, причем Ω – ориентируемая гладкая (класса C^∞) незамкнутая параметрически заданная поверхность.

Тогда метод Галеркина сходится для оператора $\hat{L}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$: приближенные решения $\mathbf{U}_m$ сходятся к единственному решению $\mathbf{U}\in\mathbf{X}$ уравнения (6) и имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\| \mathbf{U}-\mathbf{U}_m \|_{\mathbf{X}} \le C \inf_{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_m} \| \mathbf{U}-\mathbf{v} \|_{\mathbf{X}}.$$

Доказательство. Оператор $\hat{L}$ может быть представлен [1, 2] в виде

$$\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 := \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{A}\mathbf{J} = \xi\mathbf{J} - \left(k_e^2 + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\right)\int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy : \mathbf{L}_2(Q)\to\mathbf{L}_2(Q),$$

$$\hat{S}\mathbf{u} = \left(-\left(k_e^2 + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\right)\int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y \right)_\tau : W(\overline{\Omega})\to W'(\Omega) \text{ –}$$

обратимые эллиптические операторы [1–3].

Так как в рассматриваемой задаче дифракции тело и экран не имеют общих точек ($\overline{Q}\cap\overline{\Omega}=\varnothing$), то ядра операторов $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ бесконечно дифференцируемы, а сами операторы компактны. Таким образом, оператор $\hat{L}_2$

компактен, а $\hat{L}:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$ эллиптичен. Этот оператор является также непрерывно обратимым в указанных пространствах, так как он инъективен. Действительно, однородное уравнение $\hat{L}(\mathbf{J},\mathbf{u})=0$ эквивалентно однородной краевой задаче для системы уравнений Максвелла. Как показано в [1], такая задача имеет лишь тривиальное решение.

Оператор $\hat{A}$ представим [1, 2] суммой $\hat{A}_0+\hat{A}_1$ коэрцитивного и компактного операторов. Из сходимости метода Галеркина [8] для коэрцитивного оператора $\hat{A}_0$ и обратимости $\hat{A}_0+\hat{A}_1$ следует сходимость для $\hat{A}_0+\hat{A}_1$. Из сходимости метода для $\hat{S}:W\to W'$ (см. [12]) следует, что метод Галеркина сходится для $\hat{L}_1:\mathbf{X}\to\mathbf{X}'$. Теперь окончательный результат вытекает [8] из того, что оператор $\hat{L}_2$ компактен, а $\hat{L}=\hat{L}_1+\hat{L}_2$ инъективен в выбранных пространствах. Теорема доказана.

Заключение

Проведено теоретическое обоснование метода Галеркина для решения системы интегро-дифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитной волны на системе тел и неплоских экранов. На неплоских параметрически заданных экранах определены конкретные базисные функции, для которых доказано свойство аппроксимации в пространстве W. Примеры численного решения задачи дифракции на системе непересекающихся тел и экранов, иллюстрирующие сходимость метода Галеркина, приведены в [14]. Полученный в работе результат о сходимости метода Галеркина может быть перенесен и на случай частично экранированных объемных рассеивателей [3, 4, 15].

Список литературы

1. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens // Applicable Analysis: An International Journal. 2017. Vol. 96, № 8. P. 1326–1341. doi: 10.1080/09205071.2016.1172990
2. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М. : Русайнс, 2016. 226 с.
3. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. О фредгольмовости уравнения электрического поля в векторной задаче дифракции на объемном частично экранированном теле // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 9. С. 1242–1251.
4. Цупак А. А. О фредгольмовости интегро-дифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 4 (36). С. 3–11.
5. Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W. Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1982. Vol. Ap-30, № 3. P. 409–418.
6. Hänninen M., Taskinen M., Sarvas J. Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions // Prog. Electromagn. Res. PIER. 2006. Vol. 63. P. 243–278.
7. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖ «Радиотехника», 1996. 176 с.

8. Kress R. Linear integral equations. Berlin : Springer-Verlag, 1989. 300 p.
9. Tsupak A. A. Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof // Lobachevskii Journal Of Mathematics. 2023. Vol. 44. P. 4092–4101.
10. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М. : Наука, 1984. 344 с.
11. Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. : МЦНМО, 2013. 380 с.
12. Смирнов Ю. Г. О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решении уравнения электрического поля // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 1. С. 133–143.
13. Wandzura S. Electric current basis functions for curved surface // Electromagnetics. 1992. Vol. 12. P. 77–97.
14. Скворцов О. С., Цупак А. А. Численное исследование рассеяния электромагнитной волны неоднородным телом и неплоским идеально проводящим экраном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 46–65. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-4
15. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. Investigation of electromagnetic wave diffraction from an inhomogeneous partially shielded solid // Applicable Analysis: An International Journal. 2018. Vol. 97, № 11. P. 1881–1895. doi: 10.1080/00036811.2017.1343467

References

1. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Existence and uniqueness theorems in electromagnetic diffraction on systems of lossless dielectrics and perfectly conducting screens. *Applicable Analysis: An International Journal*. 2017;96(8):1326–1341. doi: 10.1080/09205071.2016.1172990
2. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel = Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies*. Moscow: Rusayns, 2016:226. (In Russ.)
3. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. On the Fredholm property of the electric field equation in the vector problem of diffraction on a volumetric partially screened body. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2016;52(9):1242–1251. (In Russ.)
4. Tsupak A.A. On Fredholm property of an integro-differential operator in the problem of electromagnetic wave diffraction on a volumetric body, partially screened by a system of flat screens. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2015;(4):3–11. (In Russ.)
5. Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape. *IEEE Trans. Antennas Propagation*. 1982;Ap-30(3):409–418.
6. Hänninen M., Taskinen M., Sarvas J. Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions. *Prog. Electromagn. Res. PIER*. 2006;63:243–278.
7. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens.* Moscow: IPRZh «Radiotekhnika», 1996:176. (In Russ.)
8. Kress R. *Linear integral equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989:300.
9. Tsupak A.A. Electromagnetic Wave Scattering from Curvilinear Screens: Galerkin Method Convergence Proof. *Lobachevskii Journal Of Mathematics*. 2023;44:4092–4101.
10. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya = Modern geometry*. Moscow: Nauka, 1984:344.

11. Agranovich M.S. *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey = Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundaries.* Moscow: MTsNMO, 2013:380.
12. Smirnov Yu.G. On the convergence of the Galerkin methods for equations with operators elliptic on subspaces and the solution of the electric field equation. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2007;47(1):133–143. (In Russ.)
13. Wandzura S. Electric current basis functions for curved surface. *Electromagnetics*. 1992;12:77–97.
14. Skvortsov O.S., Tsupak A.A. Numerical study of electromagnetic wave scattering from a non-homogeneous solid and curvilinear perfectly conducting screen. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matemati-cheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(3):46–65. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-4
15. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Investigation of electromagnetic wave diffraction from an inhomogeneous partially shielded solid. *Applicable Analysis: An International Journal*. 2018;97(11):1881–1895. doi: 10.1080/00036811.2017.1343467

Информация об авторах / Information about the authors

Алексей Александрович Цупак
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Aleksey A. Tsupak
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 20.07.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 05.09.2023

Принята к публикации / Accepted 10.10.2023